Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 4
Abgabe: 22.11.2022, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei d eine natürliche Zahl und G eine zyklische Gruppe der Mächtigkeit n.

(a) Zeige, dass G abelsch ist und die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F_d : & G & \to & G \\ & g & \mapsto & g^d \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Zu welcher uns bekannten Gruppe ist G isomorph?

(b) Wenn d die Zahl n teilt, zeige, dass $\mathrm{Ker}(F_d)$ die einzige Untergruppe der Mächtigkeit d ist. Bestimme die Mächtigkeit von $\mathrm{Im}(F_d)$.

(c) Zeige, dass F_d genau dann ein Automorphismus von G ist, wenn d und n teilerfremd sind.
HINWEIS: Bézout.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Seien $F : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und g aus G ein Element endlicher Ordnung. Zeige, dass $F(g)$ endliche Ordnung in H besitzt. Des Weiteren teilt die Zahl $\mathrm{ord}(F(g))$ die Ordnung $\mathrm{ord}(g)$.

(b) Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto & e^{2i\pi\theta} \end{array}.$$

Zeige, dass φ ein Gruppenepimorphismus ist, wobei wir die Gruppen $\mathbb{R}$ additiv und $\mathbb{S}^1$ multiplikativ betrachten.

(c) Beschreibe mit Hilfe des noetherschen Isomorphiesatzes alle Torsionselemente aus $\mathbb{S}^1$.

(d) Die Menge $\mathbb{Q}$ ist klarerweise eine additive Untergruppe von $\mathbb{R}$. Ist die Quotientengruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ endlich?

(e) Ist $\mathbb{S}^1$ isomorph zu der Quotientengruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei G eine nicht-triviale einfache endliche Gruppe und $g_0 \neq 1_G$ ein Element von G. Zeige, dass jeder Endomorphismus $F : G \to G$, der $F(g_0) = g_0^{-1}$ erfüllt, ein Automorphismus der Gruppe G ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.